



Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt)

Idee: Zu zwei gegebenen Vektoren im Raum soll ein orthogonaler (senkrechter) Vektor gefunden werden. Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man zu folgender Formel kommen (Beweis: siehe Mathebuch):

Definition des Vektorprodukts:

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des Raums heißt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

(gelesen „a kreuz b“) das **Vektorprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Anmerkung: Während das Skalarprodukt für alle Vektoren gilt, ist das Vektorprodukt nur für Vektoren im dreidimensionalen Raum definiert! Des Weiteren ergibt das Vektorprodukt zweier Vektoren wieder einen Vektor, währenddessen beim Skalarprodukt das Ergebnis eine reelle Zahl (Skalar) ist.

Zur Berechnung des Vektorprodukts ist es hilfreich, in einer *Nebenrechnung* zwei Mal die Vektoren untereinander zu schreiben. Danach werden die erste und die letzte Zeile gestrichen. Nun kann man folgendes Rechenschema anwenden:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = ? \quad \text{Nebenrechnung:}$$

3	1	
2	1	↘
-1	2	↘
3	1	↘
2	1	↘
-1	2	↘

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeweils ein Paar gekreuzter Pfeile gehört zusammen. Entlang der Pfeile wird multipliziert und das Ergebnis entlang des gestrichelten Pfeils wird von dem Ergebnis entlang des durchgezogenen Pfeils subtrahiert (abgezogen). Man erhält so die drei Koordinaten des gesuchten Vektors:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Kontrolle kann man anschließend mit dem Skalarprodukt nachrechnen, ob der gefundene

Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ wirklich orthogonal (senkrecht) zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist:

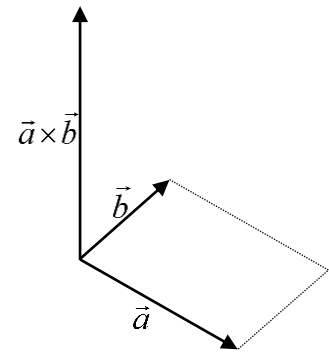
$$\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 + (-7) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0 \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 + (-7) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0$$

Damit wurde gezeigt, dass der gefundene Vektor orthogonal (senkrecht) zu den beiden gegebenen Vektoren ist, da das Skalarprodukt jeweils Null ergibt.

Eigenschaften des Vektorprodukts:

Für linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ (Raum) gilt:

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- (2) Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein „Rechtssystem“.



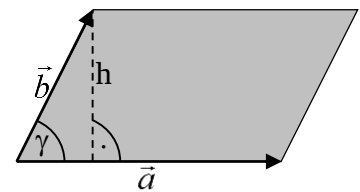
Rechengesetze für das Vektorprodukt ($\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3; r \in \mathbb{R}$):

- (1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ Anti-Kommutativgesetz
- (2) $(r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = r \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ Assoziativgesetz
- (3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ Distributivgesetz

Anwendungen des Vektorprodukts ($\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$):

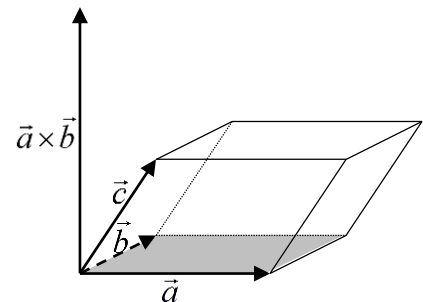
Für den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Raum aufgespannten **Parallelogramms** gilt: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Anmerkung: Die Länge des orthogonalen Vektors zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entspricht also dem Flächeninhalt des Parallelogramms!
(Der Beweis dazu steht im Mathebuch.)

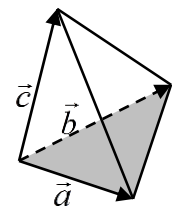


Der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte **Spat** (Parallelepiped) hat das Volumen: $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

Anmerkung: Der Term $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ wird auch als Spatprodukt bezeichnet.



Eine von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte **dreiseitige Pyramide** hat das Volumen: $V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.



Der **Abstand eines Punktes P von einer Geraden g** durch die Punkte A und B im

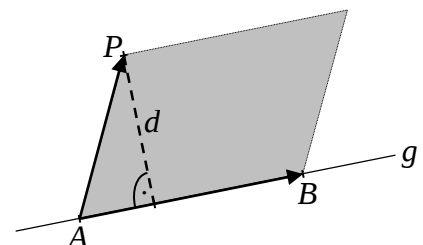
$\mathbb{R}^3$ beträgt: $d = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AP}|}{|\overline{AB}|}$.

Anmerkung: Der Zähler des Bruchs entspricht der Fläche des Parallelogramms und der Nenner entspricht der Länge der Grundseite. Die Fläche A des Parallelogramms berechnet sich bekanntlich aus Grundseite ($|\overline{AB}|$) mal Höhe (hier der Abstand zum Punkt P: d).

Löst man diese Gleichung $A = |\overline{AB} \times \overline{AP}| = |\overline{AB}| \cdot d$ nach d auf, erhält man obige Formel.

Wenn die Gerade g als Geradengleichung vorliegt ($\vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$), dann kann der Abstand zum

Punkt P so berechnet werden: $d = \frac{|\vec{r} \times (\vec{p} - \vec{s})|}{|\vec{r}|}$. Der Vektor $(\vec{p} - \vec{s})$ entspricht dabei $\overline{AP}$ aus der letzten Formel.



Übungsaufgaben zum Vektorprodukt

(1) Berechne

$$(a) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(b) Löse nur durch Nachdenken:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$(d) \left(\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(e) Löse nur durch Nachdenken:

$$\left(\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(2) Berechne die Fläche des Parallelogramms ABCD mit A(3|0|4), B(4|6|0), C(0|7|1), D(-1|1|5).

(3) Berechne die Fläche des Dreiecks ABC mit

(a) A(5|0|0), B(0|4|0), C(0|0|6)

(b) A(-2|11|23), B(1|7|-37), C(1|8|-41)

(c) A(3|0|2), B(1|4|-1), C(1|3|2)

(d) A(4|1|0), B(2|4|3), C(1|1|5)

(4) Berechne das Volumen des Spats ABCDEFGH mit A(4|1|-1), B(4|8|-1), C(1|8|-1) und E(3|2|3). Zeichne ein Schrägbild des Spats.

(5) Berechne das Volumen einer dreiseitigen Pyramide mit den Eckpunkten und zeichne ein Schrägbild der Pyramide aus Aufgabenteil (a).

(a) A(5|0|0), B(0|4|0), C(0|0|0), D(2|2|6)

(b) A(4|0|1), B(1|4|-1), C(-1|1|0), D(1|1|5)

(c) A(4|4|3), B(1|5|2), C(1|1|4), D(1|4|6)

(d) A(8|-2|3), B(0|5|-3), C(-4|7|-6), D(16|1|-16)

Lösungen

$$(1) a) \begin{pmatrix} 36 \\ -21 \\ -9 \end{pmatrix}; b) \begin{pmatrix} -36 \\ 21 \\ 9 \end{pmatrix}; c) \begin{pmatrix} 37 \\ -21 \\ -11 \end{pmatrix}; d) 75; e) \vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) 5\sqrt{38} \approx 30,822 \text{ FE}$$

$$(3) a) \sqrt{469} \approx 21,656 \text{ FE}; b) 38,5 \text{ FE}; c) 5,5 \text{ FE}; d) \frac{1}{2}\sqrt{307} \approx 8,761 \text{ FE}$$

$$(4) 84 \text{ VE}$$

$$(5) a) 20 \text{ VE}; b) 13,5 \text{ VE}; c) 7 \text{ VE}; d) 50 \text{ VE}$$