



1 Grundlagen

Zuerst ein paar grundlegende Fachbegriffe: Ein **Zufallsversuch** ist ein Experiment, dessen Ausgang (auch im Wiederholungsfall) nicht vorhersagbar ist. Als **Ergebnis** bezeichnet man das Resultat eines Zufallsversuchs. Werden mehrere Ergebnisse¹ zu einer Teilmenge zusammengefasst, dann spricht man von einem **Ereignis**. Ein **Bernoulli-Experiment**² ist ein Zufallsversuch mit genau zwei Ereignissen: E und $\bar{E}$ (gelesen: E quer), wobei $\bar{E}$ das **Gegenereignis** von E ist, und deren Wahrscheinlichkeit konstant bleibt. Tritt das Ereignis E ein, dann bezeichnet man dies als **Erfolg** oder **Treffer** und bezeichnet die zugehörige Wahrscheinlichkeit als **Erfolgs- oder Trefferwahrscheinlichkeit**.

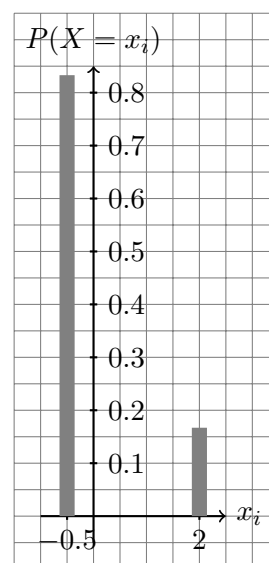
Zwei Beispiele für Bernoulli-Experimente: Eine Münze wird geworfen. Es gibt zwei mögliche Ausgänge: Kopf oder Zahl und die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse bleiben bei einer Wiederholung gleich.

Ein Würfel wird geworfen und es ist nur von Interesse, ob eine Sechs gewürfelt wird oder nicht. Auch hier ändern sich die Wahrscheinlichkeiten nicht, wenn der Würfel erneut geworfen wird.

Wird ein Bernoulli-Experiment n -mal wiederholt und bleibt die Trefferwahrscheinlichkeit (ungefähr) konstant, dann handelt es sich um eine **Bernoulli-Kette** der Länge n und mit der Trefferwahrscheinlichkeit p .

Bei bestimmten Fragestellungen ist es sinnvoll, jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu zuordnen. Beispielsweise erhält ein Spieler 2 €, wenn er eine Sechs würfelt und muss 0,5 € bezahlen, wenn er keine Sechs würfelt. Diese Zuordnung nennt man **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable** und wird üblicherweise mit X gekennzeichnet. Wird jedem Wert x_i , den die Zufallsgröße X annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zugeordnet, dann erhält man ihre **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, die als Tabelle oder Histogramm (spezielles Säulendiagramm) dargestellt werden kann:

x_i	-0,5 €	2 €
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$



¹ Ein einzelnes Ergebnis kann auch als Ereignis verstanden werden.

² Jakob Bernoulli: 1654 – 1705, schweizer Mathematiker



Die Summe der Wahrscheinlichkeiten einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist ebenso wie die Gesamtlänge aller Säulen immer 1.

2 Binomialverteilung

Hat man eine Bernoulli-Kette der Länge n und bezeichnet man mit der Zufallsgröße X die Anzahl der Treffer, dann ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X die **Binomialverteilung**. Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer wird mit $B(n; p; k)$ bezeichnet, wobei p die Trefferwahrscheinlichkeit bedeutet. Die Berechnung erfolgt nach folgender Formel:

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad (1)$$

Die Binomialverteilung hat ihren Namen von dem Binomialkoeffizienten, der in der Formel vorkommt.

Die Berechnung wird besonders umfangreich, wenn für eine Bernoulli-Kette nicht nur genau eine Trefferzahl vorgegeben ist, sondern eine Obergrenze existiert. Für diesen Fall gibt es die kumulierte³ Binomialverteilung, die mit $F(n; p; k)$ bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} P(X \leq k) = F(n; p; k) &= B(n; p; 0) + B(n; p; 1) + B(n; p; 2) + \dots + B(n; p; k) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i} \end{aligned} \quad (2)$$

Betrachten wir nun ein umfangreiches Beispiel und zeigen auch wie der Taschenrechner eingesetzt werden kann: Ein Multiple-Choice-Test besteht aus zehn Fragen mit je drei Antwortmöglichkeiten, wobei nur jeweils eine richtig ist. Der Kandidat kreuzt zufällig jeweils eine Antwort an.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **genau** 4 richtige Antworten ankreuzt?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **höchstens** 4 richtige Antworten ankreuzt?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **weniger als** 4 richtige Antworten ankreuzt?
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **mindestens** 4 richtige Antworten ankreuzt?
5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **mehr als** 4 richtige Antworten ankreuzt?
6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er 4 **bis** (einschließlich) 6 richtige Antworten ankreuzt?

³ kumulieren bedeutet anhäufen, hier summieren



Lösungen:

- Es liegt eine Bernoulli-Kette vor, da es genau zwei Ausgänge gibt (die Antwort ist richtig oder falsch) und die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ für eine richtige Antwort unverändert bleibt, p ist also konstant. n ist die Anzahl der Fragen und k die Anzahl der Treffer. Gesucht ist demnach hier: $P(X = 4) = B(10; \frac{1}{3}; 4) = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \approx 0,2276$
Mit dem Taschenrechner *fx-991DE X*⁴ von CASIO gibt es verschiedene Wege zu einer Lösung zu kommen: Entweder man tippt die obige Formel (1) ein, wobei $\binom{10}{4} = 10 \text{ nCr } 4$ entspricht, oder:

$$\boxed{\text{MENU}} \rightarrow \boxed{7} \xrightarrow{\text{Verteilungsfkt.}} \boxed{4} \xrightarrow{\text{Binomial-Dichte}} \boxed{2} \xrightarrow{\text{Variable}} \boxed{4=} \rightarrow \boxed{10=} \rightarrow \boxed{\frac{1}{3}=}$$

So kann man bequem die Parameter k , n und p eingeben. Achte bitte auf die geänderte Reihenfolge! Bei älteren Modellen steht oft für k ein x und $DIST$ bedeutet probability distribution, was auf Deutsch Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kandidat genau 4 richtige Antworten ankreuzt, liegt folglich bei ca. 22,76%.

- Hier sind folgende Wahrscheinlichkeiten zu berechnen:

$$P(X \leq 4) = B(10; \frac{1}{3}; 0) + B(10; \frac{1}{3}; 1) + \dots + B(10; \frac{1}{3}; 4) = F(10; \frac{1}{3}; 4)$$

Mit dem Taschenrechner gibt es entweder die Möglichkeit die Summenformel (2) einzugeben:

$$\sum_{x=0}^4 10 \text{ nCr } x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-x} \approx 0,7869$$

Dazu empfiehlt sich die *MthIO* bzw. *Mth2D* Eingabe, die im $\boxed{\text{SETUP}}$ ausgewählt werden kann.

Mit dem *fx-991DE X* gibt es die noch elegantere Variante über die Eingabe der Parameter:

$$\boxed{\text{MENU}} \rightarrow \boxed{7} \xrightarrow{\text{Verteilungsfkt.}} \boxed{\downarrow} \xrightarrow{\text{Kumul. Binom.-V}} \boxed{1} \xrightarrow{\text{Variable}} \boxed{2} \xrightarrow{k} \boxed{4=} \rightarrow \boxed{10=} \rightarrow \boxed{\frac{1}{3}=}$$

Achtung: Hier muss die kumulierte Binomialverteilung (binomial cumulative distribution) verwendet werden. Der Taschenrechner muss also bei der Parametereingabe entsprechend eingestellt sein.

Alternativ kann man natürlich die fünf Wahrscheinlichkeiten mit der Formel (1) einzeln berechnen und addieren.

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens vier richtige Antworten anzukreuzen, liegt also bei ca. 78,69%.

⁴ Das Vorgängermodell *fx-991DE PLUS* bietet die gleichen Möglichkeiten. Das noch ältere Modell *fx-991ES* ist leider nicht geeignet.



3. Da es weniger als vier richtige Antworten sein sollen, können es nur 0, 1, 2 oder 3 richtige Antworten sein. Also müssen folgende Wahrscheinlichkeiten berechnet und summiert werden:

$$\begin{aligned} P(X < 4) &= P(X \leq 3) = B\left(10; \frac{1}{3}; 0\right) + B\left(10; \frac{1}{3}; 1\right) + B\left(10; \frac{1}{3}; 2\right) + B\left(10; \frac{1}{3}; 3\right) \\ &= F\left(10; \frac{1}{3}; 3\right) \\ &\approx 0,5593 \end{aligned}$$

Die Eingabe in den Taschenrechner erfolgt wie bei Lösung 2:

$$\sum_{x=0}^3 10 \text{nCr} X \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^X \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-X} \approx 0,5593$$

oder beim *fx-991DE* X:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \text{Verteilungsfkt.} & & & \text{Kumul. Binom.-V} & & \text{Variable} & & k & & n & & p \\ \boxed{\text{MENU}} & \rightarrow & \boxed{7} & \rightarrow & \boxed{\downarrow} & \rightarrow & \boxed{1} & \rightarrow & \boxed{2} & \rightarrow & \boxed{3=} & \rightarrow & \boxed{10=} & \rightarrow & \boxed{\frac{1}{3}=} \end{array}$$

Alternativ kann man auch hier die vier Wahrscheinlichkeiten mit der Formel (1) einzeln berechnen und addieren.

Die Wahrscheinlichkeit, weniger als vier richtige Antworten anzukreuzen, liegt also bei ca. 55,93%.

4. Für die Eingabe in den Taschenrechner empfiehlt sich folgende Umwandlung des Problems: $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$. Jetzt kann man die Berechnung aus Lösung 3 übernehmen und ergänzt am Ende $\boxed{1-\text{Ans}}$. Wer die bequeme Variante über die Parametereingabe beim *fx-991DE PLUS* wählt muss dafür allerdings zurück in den normalen Modus wechseln:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & \text{Verteilungsfkt.} & & & \text{Kumul. Binom.-V} & & \text{Variable} & & k & & n & & p \\ \boxed{\text{MENU}} & \rightarrow & \boxed{4} & \rightarrow & \boxed{\downarrow} & \rightarrow & \boxed{1} & \rightarrow & \boxed{2} & \rightarrow & \boxed{3=} & \rightarrow & \boxed{10=} & \rightarrow & \boxed{\frac{1}{3}=} \\ & & & & & & & & & & & \text{Berechnungen} & & & \\ & & & & & & & & & & & \rightarrow & \boxed{\text{MENU}} & \rightarrow & \boxed{1} & \rightarrow & \boxed{1-\text{Ans}=} \end{array}$$

Bei der Eingabe über die Summenformel ist man etwas flexibler, da hier die untere Grenze nicht unbedingt Null sein muss. So kommt man direkt zu dem richtigen Ergebnis (**ohne** 1-Ans):

$$\sum_{x=4}^{10} 10 \text{nCr} X \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^X \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-X} \approx 0,4407$$

Als Ergebnis erhält man schließlich eine Wahrscheinlichkeit von ca. 44,07%.



5. Der kleine Unterschied zur letzten Lösung besteht darin, dass es nun mehr als vier richtige Antworten sein müssen, also 5, 6, 7, 8, 9 oder 10 richtige Antworten. Vier richtige Lösungen sind nicht ausreichend.

Die Umwandlung der Problemstellung führt zu: $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$. Jetzt kann man sich an Lösung 4 orientieren und erhält als gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X > 4) \approx 0,2131$ also ca. 21,31%.

6. Diese Aufgabenstellung ist ohne Zwischenspeicher am einfachsten über die Summenformel (2) zu lösen:

$$\sum_{x=4}^6 {}^{10}\text{nCr} X \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^X \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-X} \approx 0,4211$$

Alternativ kann man auch wie folgt verfahren:

$P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) = F(10; \frac{1}{3}; 6) - F(10; \frac{1}{3}; 3)$ und bei Lösung 2 nachsehen.

Die Wahrscheinlichkeit vier bis (einschließlich) sechs richtige Antworten anzukreuzen beträgt jedenfalls ca. 42,11%.



3 Normalverteilung

Das Problem bei der Berechnung der Binomialverteilung ist, dass sie sehr viel Rechenzeit⁵ benötigt, wenn die Zahlen größer werden. Versuchen Sie einmal

$$\sum_{x=0}^{50} \binom{150}{x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{150-x} \approx 0,99996$$

zu berechnen. Das macht nicht jeder Taschenrechner mit! Für große n (Anzahl der Versuche) und k (Anzahl der Treffer) gibt es daher die Möglichkeit für eine binomialverteilte Zufallsgröße X eine Näherungslösung mit der Normalverteilung zu bestimmen. Dies gilt sowohl für die Binomialverteilung, als auch für die kumulierte Binomialverteilung. Damit die Abweichungen nicht allzu groß ausfallen, muss die **Laplace-Bedingung** erfüllt sein:

$$n \cdot p \cdot (1 - p) > 9 \quad \text{oder} \quad \sigma(X) > 3$$

Betrachten wir zunächst die Näherungslösung für die Binomialverteilung: Dazu bestimmen wir die Standardabweichung

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \quad (3)$$

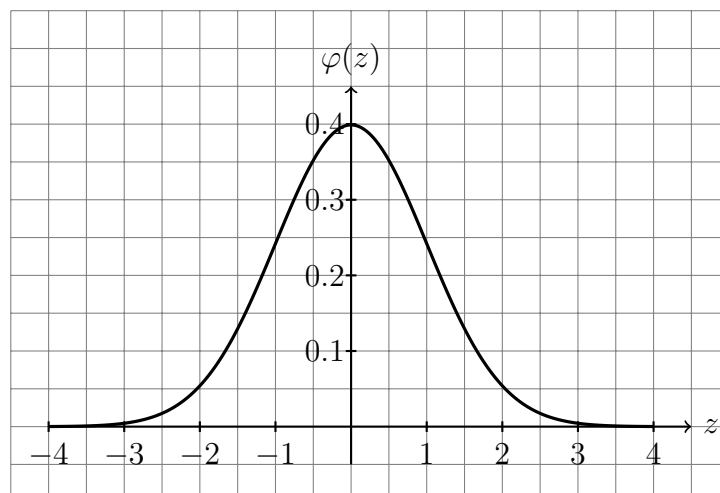
und die Hilfsgröße

$$z = \frac{k - n \cdot p}{\sigma(X)} \quad (4)$$

Dann gilt:

$$P(X = k) = B(n; p; k) \approx \varphi(z) = \frac{1}{\sigma(X) \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad (5)$$

Diese Exponentialfunktion hat die Form einer Glocke und wird nach dem Mathematiker Carl Friedrich Gauß auch Gauß'sche Glockenfunktion genannt:



⁵ Zumindest früher war das so!



Betrachten wir erneut das Beispiel aus dem Abschnitt Binomialverteilung. Da die Laplace-Bedingung für $n = 10$ und $p = \frac{1}{3}$ nicht erfüllt ist ($10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9} < 9$), müssen wir die Aufgabe leicht verändern, um sinnvolle Ergebnisse zu bekommen: Der Multiple-Choice-Test besteht jetzt aus 50 Fragen mit je drei Antwortmöglichkeiten, wobei nur jeweils eine richtig ist. Der Kandidat kreuzt zufällig jeweils eine Antwort an. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherungslösung.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **genau** 20 richtige Antworten ankreuzt?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **höchstens** 20 richtige Antworten ankreuzt?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **weniger als** 20 richtige Antworten ankreuzt?
4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **mindestens** 20 richtige Antworten ankreuzt?
5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **mehr als** 20 richtige Antworten ankreuzt?
6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er 20 **bis** (einschließlich) 24 richtige Antworten ankreuzt?

Das Beispiel ist übrigens extra so gewählt, dass ein Vergleich mit der Binomialverteilung bzw. der kumulierten Binomialverteilung noch möglich ist. Für $n = 1000$ (1000 Fragen) geht das nicht mehr so ohne Weiteres.

Lösungen:

1. Zuerst bestimmen wir mit den Formeln (3) und (4) sowohl die Standardabweichung als auch die Hilfsgröße z :

$$\sigma(X) = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{10}{3}$$

$$z = \frac{20 - 50 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{10}{3}} = 1$$

Dann setzen wir beide Werte in (5) ein:

$$B(50; \frac{1}{3}; 20) \approx \frac{1}{\frac{10}{3} \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot 1^2}$$

$$\approx 0,0726$$

Vergleichen wir unsere Näherungslösung mit dem exakten Wert $B(50; \frac{1}{3}; 20) = 0,0705$, dann stellen wir fest, dass die Näherungslösung bis auf zwei Stellen nach dem Komma genau ist. Diese Genauigkeit reicht in der Regel aus. Die Wahrscheinlichkeit von 50 Fragen genau 20 Fragen richtig zu beantworten liegt also bei ungefähr 7%.

Mit dem Taschenrechner *fx-991DE X* von *Casio* kann man auch direkt die Normalverteilung auswählen und über die Eingabe von den Parametern k (gefragt wird nach x), σ und μ die Näherungslösung bestimmen. Für diese Aufgabe gilt: $x = k = 20$,



$\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{10}{3}$ und $\mu = 50 \cdot \frac{1}{3} = \frac{50}{3}$. Damit ergibt sich für $B(50; \frac{1}{3}; 20) \approx 0,0726$:

$$\boxed{\text{MENU}} \rightarrow \boxed{7} \xrightarrow{\text{Verteilungsfkt.}} \boxed{1} \xrightarrow{\text{Normal-Dichte}} \boxed{20=} \rightarrow \boxed{\frac{10}{3}=} \rightarrow \boxed{\frac{50}{3}=}$$

2. Bei dieser Fragestellung muss die kumulierte Normalverteilung verwendet werden, da es um die Summe aller Wahrscheinlichkeiten für $k = 0$ bis $k = 20$ geht. Folglich muss hier das Integral zur Berechnung angewendet werden:

$$P(X \leq k) = F(n; p; k) \approx \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad \text{mit} \quad z = \frac{k - n \cdot p + 0,5}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \quad (6)$$

Bei dieser Aufgabe ist $z = \frac{20 - 50 \cdot \frac{1}{3} + 0,5}{\sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{23}{20} = 1,15$. Damit kann man die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen: $P(X \leq 20) = F(50; \frac{1}{3}; 20) \approx \Phi(1,15) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,15} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$. Die untere Grenze des Integrals lässt sich so leider nicht in den Taschenrechner eingeben, daher verwenden wir hier eine Abkürzung und nehmen -7 anstatt $-\infty$. Das ist für alle Aufgaben in der Schule hinreichend genau, da $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-7} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \approx 0,128 \cdot 10^{-11}$. Also

$$P(X \leq 20) = F(50; \frac{1}{3}; 20) \approx \Phi(1,15) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7}^{1,15} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \approx 0,87493$$

Für die Eingabe in den Taschenrechner muss noch die Integrationsvariable t durch x ersetzt werden, da der Taschenrechner kein t bereitstellt. Auf das x wird hier jedoch verzichtet, um mathematische Verwechslungen mit der Zufallsvariablen zu vermeiden. Vergleichen wir den Näherungswert mit $F(50; \frac{1}{3}; 20) \approx 0,87408$, dann sehen wir, dass die ersten drei Nachkommastellen übereinstimmen. Der z -Wert in der Formel (6) musste im Vergleich zur Formel (4) um 0,5 im Zähler ergänzt werden, um die volle Breite der standardisierten Säule zu erhalten. Diese Stetigkeitskorrektur darf jedoch nur bei diskreten Werten angewendet werden!

Deutlich einfacher geht die Berechnung mit dem Taschenrechner, wenn man die im Funktionsumfang enthaltene kumulierte Normalverteilung (normal cumulative distribution) auswählt. Dazu benötigen wir $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{10}{3}$ und $\mu = 50 \cdot \frac{1}{3} = \frac{50}{3}$

$$\boxed{\text{MENU}} \rightarrow \boxed{7} \xrightarrow{\text{Verteilungsfkt.}} \boxed{2} \xrightarrow{\text{Kumul. Normal-V}} \boxed{0=} \rightarrow \boxed{20,5=} \rightarrow \boxed{\frac{10}{3}=} \rightarrow \boxed{\frac{50}{3}=}$$

Hier muss die obere Grenze um 0,5 korrigiert werden, damit die volle Breite der standardisierten Säule berücksichtigt wird.



3. Bei dieser Fragestellung ergibt sich der gleiche Rechenweg wie zuvor, lediglich die obere Grenze muss angepasst werden. Beginnen wir mit dem einfachsten Weg:

$$\boxed{\text{MENU}} \rightarrow \boxed{7} \xrightarrow{\text{Verteilungsfkt.}} \boxed{2} \xrightarrow{\text{Kumul. Normal-V}} \boxed{0=} \xrightarrow{\text{Untere}} \boxed{19,5=} \xrightarrow{\text{Obere}} \boxed{\frac{10}{3}=} \xrightarrow{\sigma} \boxed{\frac{50}{3}=} \xrightarrow{\mu}$$

und erhalten $P(X < 20) = P(X \leq 19) \approx 0,802337$. Wichtig ist auch hier, die obere Grenze anzupassen! Für die Berechnung mit dem Integral benötigen wir $z = \frac{19 - \frac{50}{3} + 0,5}{\frac{10}{3}} = \frac{17}{20} = 0,85$:

$$P(X \leq 19) \approx \Phi(0,85) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7}^{0,85} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \approx 0,802337$$

Der genauere Wert zum Vergleich beträgt: $F(50; \frac{1}{3}; 19) \approx 0,80359$.

4. Mindestens 20 richtige Antworten bedeutet: 20, 21, 22, ..., 50 richtige Antworten. Da der Taschenrechner bei der eingebauten kumulierten Normalverteilung nach beiden Grenzen fragt, lässt sich auch diese Aufgabe ganz einfach lösen:

$$\boxed{\text{MENU}} \rightarrow \boxed{7} \xrightarrow{\text{Verteilungsfkt.}} \boxed{2} \xrightarrow{\text{Kumul. Normal-V}} \boxed{19,5=} \xrightarrow{\text{Untere}} \boxed{50=} \xrightarrow{\text{Obere}} \boxed{\frac{10}{3}=} \xrightarrow{\sigma} \boxed{\frac{50}{3}=} \xrightarrow{\mu}$$

und erhalten $P(X \geq 20) \approx 0,19766$. Nicht vergessen: Hier muss die untere Grenze angepasst werden!

Alternativ kann man auch mit dem Integral rechnen: $z = \frac{20 - \frac{50}{3} - 0,5}{\frac{10}{3}} = \frac{17}{20} = 0,85$

$$P(X \geq 20) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0,85}^7 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \approx 0,19766$$

Aufpassen: Die Hilfsgröße z wurde hier nach unten korrigiert ($-0,5$) und bei der vorherigen Aufgabe nach oben korrigiert ($+0,5$). Zum Merken: Die untere Grenze wird nach unten korrigiert und die obere Grenze nach oben!

Die nicht interessanten Fälle sind übrigens 0, 1, 2, 3, ..., 19 richtige Antworten (Null nicht vergessen!). Daher können wir auch mit der Gegenwahrscheinlichkeit rechnen:

$P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7}^{0,85} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \approx 0,19766$. Zum Vergleich der exakte Wert: $P(X \geq 20) = 1 - F(50; \frac{1}{3}; 19) \approx 0,196414$.

5. Hier sind die Fälle interessant: 21, 22, 23, ..., 50 richtige Antworten:

$$\boxed{\text{MENU}} \rightarrow \boxed{7} \xrightarrow{\text{Verteilungsfkt.}} \boxed{2} \xrightarrow{\text{Kumul. Normal-V}} \boxed{20,5=} \xrightarrow{\text{Untere}} \boxed{50=} \xrightarrow{\text{Obere}} \boxed{\frac{10}{3}=} \xrightarrow{\sigma} \boxed{\frac{50}{3}=} \xrightarrow{\mu}$$

und erhalten $P(X > 20) = P(X \geq 21) \approx 0,12507$.

Bei der Berechnung mit dem Integral sieht es so aus: $z = \frac{21 - \frac{50}{3} - 0,5}{\frac{10}{3}} = \frac{23}{20} = 1,15$

$$P(X > 20) = P(X \geq 21) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1,15}^7 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \approx 0,12507$$

Zum Vergleich auch hier der genauere Wert:

$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - F(50; \frac{1}{3}; 20) \approx 0,125924$.



6. Auch hier ist die Berechnung der Lösung über die eingebaute Funktion im Taschenrechner am einfachsten:

$$\boxed{\text{MENU}} \rightarrow \boxed{7} \xrightarrow{\text{Verteilungsfkt.}} \boxed{2} \xrightarrow{\text{Kumul. Normal-V}} \boxed{19,5 =} \xrightarrow{\text{Untere}} \boxed{24,5 =} \xrightarrow{\text{Obere}} \boxed{\frac{10}{3} =} \xrightarrow{\sigma} \boxed{\frac{50}{3} =} \xrightarrow{\mu}$$

und erhalten $P(20 \leq X \leq 24) \approx 0,188276$.

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit der Gauß'schen Integralfunktion müssen zwei Hilfsgrößen berechnet werden: $z_1 = \frac{20 - \frac{50}{3} - 0,5}{\frac{10}{3}} = \frac{17}{20} = 0,85$ (die untere Grenze wird nach unten korrigiert) und $z_2 = \frac{24 - \frac{50}{3} + 0,5}{\frac{10}{3}} = \frac{47}{20} = 2,35$ (die obere Grenze wird nach oben korrigiert).

$$P(20 \leq X \leq 24) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0,85}^{2,35} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \approx 0,188276$$

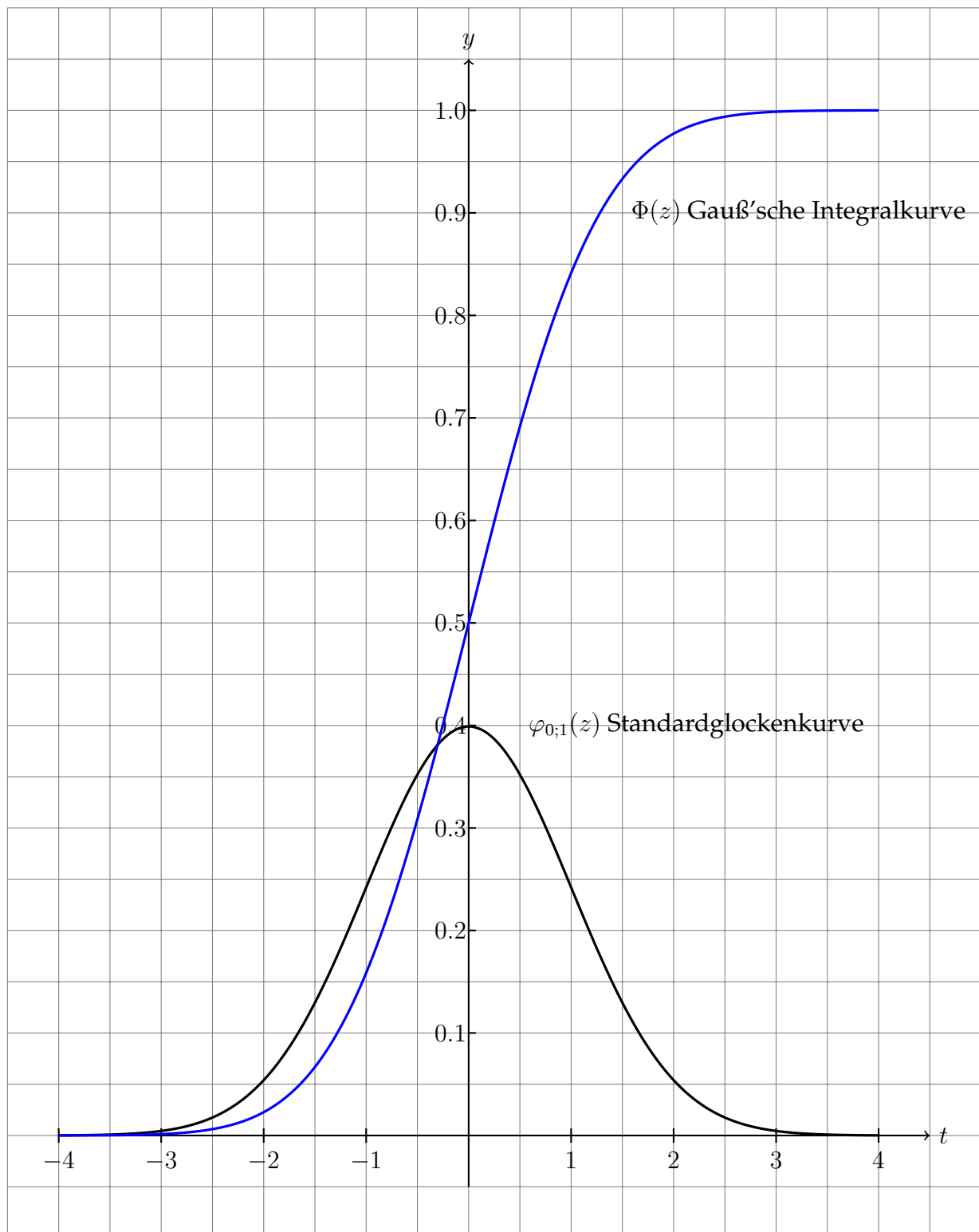
Und auch hier zum Vergleich der genauere Wert über die kumulierte Binomialverteilung: $P(20 \leq X \leq 24) \approx 0,185587$.

4 Diskret versus stetig

Die Binomialverteilung kann nur bei diskret verteilten (ganzzahligen) Zufallsgrößen angewendet werden. Beispielsweise ist eine Antwort bei einem Multiple-Choice-Test entweder richtig oder falsch. Dazwischen gibt es keine „Grauzone“ – auch wenn mancher Fahrschüler das bei der theoretischen Fahrprüfung gerne hätte. Mit der Normalverteilung lassen sich jedoch auch stetig verteilte (reellwertige) Zufallsgrößen untersuchen: Körpergrößen, Wartezeiten, Geschwindigkeiten, ... Die oben angesprochene Stetigkeitskorrektur um 0,5 darf jedoch nur bei diskreten Werten angewendet werden und *nicht* bei stetigen! Mehr dazu im Unterricht.



5 Glocken- und Integralkurve





6 Inverse Normalverteilung

Aufgabe: In einem Regierungsbezirk sind 300 Lehrer beschäftigt. Durchschnittlich sind 5% der Lehrkräfte krank. Der Unterricht verläuft jedoch nur reibungslos, wenn kein Lehrer ausfällt. Um die krankheitsbedingten Ausfälle zu kompensieren hat die Landesregierung die „Unterrichtsgarantie Plus“ eingerichtet. Hier gibt es eine Personengruppe, die bei Bedarf einspringt. Wie viele Personen müssen bereitstehen, um mit mindestens 99% Sicherheit einen reibungslosen Unterricht zu gewährleisten?

Lösung mit der Binomialverteilung: In dieser Aufgabe ist k gesucht und nicht wie zuvor die Wahrscheinlichkeit p . Beispielsweise kann man mit dem Taschenrechner so lange probieren, bis man ein passendes k gefunden hat. Dabei stellt man fest, dass $F(300; 0,05; 23) \approx 0,9832$ gerade noch zu klein ist und $F(300; 0,05; 24) \approx 0,99065 > 0,99$ ist. k muss also mindestens 24 sein: $k \geq 24$. Für die Aufgabe bedeutet das, dass bei einer Anzahl von mindestens 24 Springern die Wahrscheinlichkeit für einen reibungslosen Unterrichts mindestens 99% beträgt.

Als Alternative kann man auch eine Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung verwenden:

		p
n	k	...
300	...	0,05
	...	...
	22	0,9708
	23	0,9832
	24	← 0,9907
	25	0,9950
	26	0,9974
	...	...

Das Modell von Casio *fx-991DE X* kann das Probieren bzw. die Suche in Tabellen (sofern diese im Unterricht überhaupt noch behandelt werden) etwas vereinfachen, weil bei diesem Taschenrechner in einer Wertetabelle auch eine Summenfunktion eingegeben werden kann:

$f(x) = \sum_{x=0}^x \binom{300}{x} \cdot 0,05^x \cdot 0,95^{300-x}$. Allerdings dauert die Berechnung je nach Tabellenbereich recht lange! Bei einem Startwert von 20, einem Ende bei 27 und der Schrittweite (Inkrement) 1 zeigt der Taschenrechner erst nach ca. 20 Sekunden die Wertetabelle an. Außerdem muss man hier beachten, dass bei den Funktionswerten in der Tabelle die Nachkommastellen *nicht* gerundet, sondern nur abgeschnitten werden. Wählt man jedoch mit den Cursor-Tasten den Funktionswert aus, dann wird der auf 10 Stellen *gerundete* Wert angezeigt.

Noch einfacher und schneller geht es mit der **inversen Normalverteilung**. Hier bestimmt man zuerst die Hilfsgrößen

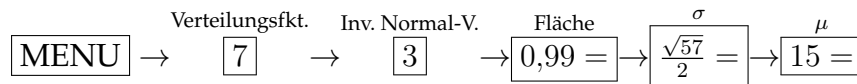
$$\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0,05 = 15$$

und

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{300 \cdot 0,05 \cdot 0,95} = \frac{\sqrt{57}}{2} \approx 3,7749 > 3$$



Da $\sigma > 3$ gilt, ist die Laplace-Bedingung erfüllt und die Normalverteilung kann als Näherungslösung verwendet werden. Jetzt gibt man als Area bzw. Fläche 0,99 ein und die eben genannten Hilfsgrößen. Als Ergebnis erhält man $k \approx 23,78$ (xInv). Da es hier um diskrete Größen geht, muss aufgerundet werden: $k \geq 24$. Hierfür kann man beide genannten Taschenrechnermodelle verwenden.



Die Wahrscheinlichkeit von 0,99 (99%) kann man bei der Glockenkurve auf Seite 11 als Fläche unterhalb der Kurve visualisieren. Daher fragt der Taschenrechner bei der Parametereingabe nach der *Fläche* (Modell fx-991DE X) bzw. bei dem älteren Modell nach *Area* (Modell fx-991DE PLUS).