



Aufgaben zum Hypothesentest (Alternativtest)

- Ü 1** Ein Gärtner übernimmt einen Posten von großen Behältern mit Blumensamen. Der Inhalt einiger Behälter ist zu 70% keimfähig, der Inhalt der restlichen jedoch nur zu 40%. Es ist aber nicht bekannt, um welche Behälter es sich jeweils handelt. Um dies festzustellen, wird jedem Behälter eine Stichprobe von 10 Samen entnommen und einem Keimversuch unterzogen. Geht mehr als die Hälfte der Samen an, wird dem Samen im entsprechenden Behälter eine Keimfähigkeit von 70% zugeordnet, andernfalls nur eine von 40%. Formulieren Sie welche Irrtümer auftreten können und welche Konsequenzen diese Irrtümer haben. Berechnen Sie wie groß die Irrtumswahrscheinlichkeiten sind.
- Ü 2** Der Gärtner aus der vorherigen Übungsaufgabe strebt an, dass einem Behälter mit Samen niedriger Keimfähigkeit (40%) mit nur geringer Wahrscheinlichkeit α irrtümlich eine hohe Keimfähigkeit (70%) zugeordnet wird. Formulieren Sie eine neue Entscheidungsregel, damit $\alpha \leq 5\%$ gilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die sich nun für die irrtümliche Zuordnung einer niedrigen Keimfähigkeit zu einem Behälter mit tatsächlich hoher Keimfähigkeit ergibt. Beurteilen Sie das Testverfahren.
- Ü 3** Ein Großkunde, der mehrere Apfelkisten kaufen möchte, hat die Vermutung, dass Kisten 2. Wahl mit einem Abfallanteil von mindestens 25% versehentlich untergemischt wurden. Bei den Apfelkisten 1. Wahl liegt der Abfall bei 10%. Sind in einer Stichprobe von 20 Äpfeln mehr als vier Äpfel Abfall, so wird angenommen, dass sie aus einer Kiste 2. Wahl stammen. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeiten.
- Ü 4** Ein Unternehmen erhält eine große Lieferung von Dioden. Der Hersteller verwendet zwei Maschinen mit unterschiedlichen Ausschussanteilen: 5% bzw. 8%. Um festzustellen, welcher Ausschussanteil tatsächlich vorliegt, testet das Unternehmen eine Stichprobe von 200 Dioden.
- Berechnen Sie für beide Ausschussanteile den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X , welche die Anzahl der defekten Dioden in der Stichprobe angibt.
 - Formulieren Sie für diesen Alternativtest die beiden Hypothesen und geben Sie geeignete Entscheidungsregeln aus der Sicht des Unternehmens an. Nehmen Sie als kritische Zahl $K = 12$ an. Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeiten.
 - Formulieren Sie die Entscheidungsregeln unter der Bedingung, dass der α -Fehler nur 5% betragen soll. Beurteilen Sie anschließend unter dieser Bedingung den Test.
 - Bearbeiten Sie die beiden vorherigen Teilaufgaben aus der Sicht des Herstellers.



Lösungen

Übung 1

Einer der beiden Irrtümer ist, dass man aufgrund des Ergebnisses der Stichprobe behauptet, dass der Behälter zu 70% keimfähig ist, obwohl er nur zu 40% keimfähig ist. Der andere Irrtum ist, dass man behauptet, dass der Behälter zu 40% keimfähig ist, obwohl er zu 70% keimfähig ist. Aus der Sicht des Gärtners ist der zuerst beschriebene Fehler der schlimmere. Er bekäme deutlich schlechtere Ware und würde jedoch davon ausgehen, dass die Behälter zu 70% keimfähig sind, obwohl es nur 40% sind. Im anderen Fall bekäme er die bessere Qualität, obwohl er davon ausgeht, dass sie schlechter ist. Das wäre für den Gärtner weniger dramatisch.

H_0 : Der Behälter ist zu 40% keimfähig ($p = 0,4$)

H_1 : Der Behälter ist zu 70% keimfähig ($p = 0,7$)

p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Samen angeht.

X ist die Anzahl der keimfähigen Samen von den $n = 10$ entnommenen Samen.

Wenn $X \leq 5$, dann entscheiden wir uns für H_0

Wenn $X > 5$, dann entscheiden wir uns für H_1

Der „dramatischere“ Fehler (α -Fehler) ist hier, wenn wir uns für H_1 entscheiden, obwohl H_0 richtig gewesen wäre. Daher wurden die Hypothesen in dieser Reihenfolge bezeichnet. Die Binomialverteilung kann verwendet werden, da nur zwei Ergebnisse auftreten können und die Wahrscheinlichkeit trotz ziehen ohne Zurücklegen annähernd konstant ist.

Der Fehler 1. Art:

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1) \\ &= P(X > 5); n = 10; p = 0,4\end{aligned}$$

Da in der Tabelle der kumulierten Binomialverteilung nur „ $\leq$ “ abgelesen werden kann, muss $P(X > 5)$ in $P(X \leq 5)$ umgewandelt werden!

$$\begin{aligned}&= 1 - P(X \leq 5); n = 10; p = 0,4 \\ &= 1 - F(10; 0,4; 5) \\ &= 16,62\%\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 16,62% wird dem Behälter eine Keimfähigkeit von 70% zugeordnet, obwohl es nur 40% sind.

Der Fehler 2. Art:

$$\begin{aligned}\beta &= P_{H_1}(\text{Entscheidung für } H_0) \\ &= P(X \leq 5); n = 10; p = 0,7 \\ &= F(10; 0,7; 5) \\ &= 15,03\%\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 15,03% wird dem Behälter eine Keimfähigkeit von 40% zugeordnet, obwohl es 70% sind.



Übung 2

Die Größe der kritischen Zahl K sorgt für die Wahl der Hypothese. Bei diesem Beispiel ist sie unbekannt und die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist vorgegeben! Ansonsten gelten die Angaben aus Übung 1.

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - F(10; 0,4; K) \leq 5\% \\ 1 - 0,05 &\leq F(10; 0,4; K) \\ 0,95 &\leq F(10; 0,4; K)\end{aligned}$$

Ablesen in der Tabelle führt zu:

$$K = 7$$

Damit ergeben sich die folgenden neuen Entscheidungsregeln:

Falls $X \leq 7 \Rightarrow H_0$ und

falls $X > 7 \Rightarrow H_1$.

Gleichzeitig ändert sich auch der β -Fehler: $\beta = F(10; 0,7; 7) = 61,72\%$. Dieser Fehler ist jedoch so groß, dass der Test unbrauchbar wird.

Übung 3

H_0 : Die Apfelkiste ist 2. Wahl ($p = 0,25$)

H_1 : Die Apfelkiste ist 1. Wahl ($p = 0,1$)

Umfang der Stichprobe: $n = 20$

Entscheidungsregeln: $X > 4 \Rightarrow H_0$ $X \leq 4 \Rightarrow H_1$

X ist die Anzahl der als Abfall eingestuftten Äpfel aus der Stichprobe und p die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

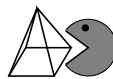
$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(H_1) \\ &= P(X \leq 4); n = 20; p = 0,25 \\ &= F(20; 0,25; 4) \\ &= 41,48\%\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 41,48% wird die Kiste als 1. Wahl eingestuft, obwohl sie nur 2. Wahl ist.

$$\begin{aligned}\beta &= P_{H_1}(H_0) \\ &= P(X > 4); n = 20; p = 0,1 \\ &= 1 - P(X \leq 4); n = 20; p = 0,1 \\ &= 1 - F(20; 0,1; 4) \\ &= 4,32\%\end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,32% wird die Kiste als 2. Wahl eingestuft, obwohl sie 1. Wahl ist.

Anmerkung: Der α -Fehler ist so groß, dass der Test in dieser Form unbrauchbar ist!



Übung 4

a) Umfang der Stichprobe: $n = 200$

$$p = 0,05$$

$$\mu = 10$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{38}}{2} \approx 3,08$$

$$p = 0,08$$

$$\mu = 16$$

$$\sigma = \frac{4\sqrt{23}}{5} \approx 3,84$$

b) H_0 : Der Ausschussanteil beträgt 8% ($p_0 = 0,08$) H_1 : Der Ausschussanteil beträgt 5% ($p_1 = 0,05$)

$$\text{Entscheidungsregel: } \begin{cases} X \leq 12 \Rightarrow H_1 \\ X > 12 \Rightarrow H_0 \end{cases}$$

$$\alpha = P_{H_0}(H_1)$$

$$= P(X \leq 12)$$

$$= F(200; 0,08; 12)$$

$$\approx 18,21\%$$

$$\beta = P_{H_1}(H_0)$$

$$= P(X > 12)$$

$$= 1 - F(200; 0,05; 12)$$

$$\approx 20,35\%$$

c)

$$\alpha = P_{H_0}(H_1) \leq 0,05$$

$$F(200; 0,08; K) \leq 0,05$$

$$K \leq 9$$

Begründung: $F(200; 0,08; 9) \approx 0,0374 < 0,05$ und $F(200; 0,08; 10) \approx 0,0691 > 0,05$ Daraus folgt für den β -Fehler: $\beta = 1 - F(200; 0,05; 9) \approx 54,53\%$. Diese Irrtumswahrscheinlichkeit ist viel zu groß und damit der ganze Test unbrauchbar.

Name: _____



Hypothesentests

d) H_0 : Der Ausschussanteil beträgt 5% ($p_0 = 0,05$)

H_1 : Der Ausschussanteil beträgt 8% ($p_1 = 0,08$)

Entscheidungsregel: $\begin{cases} X \leq 12 \Rightarrow H_0 \\ X > 12 \Rightarrow H_1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(H_1) \\ &= P(X > 12) \\ &= 1 - F(200; 0,05; 12) \\ &\approx 20,35\% \\ \beta &= P_{H_1}(H_0) \\ &= P(X \leq 12) \\ &= F(200; 0,08; 12) \\ &\approx 18,21\%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= P_{H_0}(H_1) \leq 0,05 \\ 1 - F(200; 0,05; K) &\leq 0,05 \\ F(200; 0,05; K) &\geq 0,95 \\ K &\geq 15\end{aligned}$$

Begründung: $F(200; 0,05; 14) \approx 0,9219 < 0,95$ und $F(200; 0,05; 15) \approx 0,9556 > 0,95$

Daraus folgt für den β -Fehler: $\beta = F(200; 0,08; 15) \approx 46,26\%$. Diese Irrtumswahrscheinlichkeit ist viel zu groß und damit der ganze Test unbrauchbar.