

Lösung mit Hinweisen zum Hypothesentest

Aus dem Buch „Erfolg im Mathe-Abi Basiswissen“ (2011)

23.1 a)

$$H_0: p = \frac{1}{6}$$

Die Nullhypothese bezieht sich normalerweise auf den „status quo“.

Der Annahmebereich ist die Menge aller Ergebnisse, bei denen die Nullhypothese angenommen wird: $A = \{8, 9, 10, 11, 12\}$

Alle anderen Fälle ergeben den Ablehnungsbereich (also das Komplement):

$$\bar{A} = \{0, 1, \dots, 7\} \cup \{13, 14, \dots, 60\}$$

Da der Würfel in Ordnung ist, ist die Nullhypothese wahr. Dennoch entscheidet man sich für die Alternativhypothese H_1 . Hier begeht man den Fehler 1. Art oder α -Fehler.

Die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Fehler begangen wird, bezeichnet man als Irrtumswahrscheinlichkeit.

23.1 b)

$$H_0: p \leq \frac{1}{20} \text{ für einen Treffer „der Apfel ist nicht einwandfrei“}$$

Die Nullhypothese wird angenommen, wenn höchstens K Äpfel nicht einwandfrei sind. 5% von $n = 50$ sind 2,5 nicht einwandfreie Äpfel. Man sollte demnach eine kritische (ganze) Zahl K in der Nähe vom Erwartungswert $\mu = 2,5$ wählen. Eine Möglichkeit wäre: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, daraus ergibt sich: $\bar{A} = \{5, 6, \dots, 50\}$. Ein kleinerer oder größerer Annahmebereich wäre ebenfalls denkbar. Hier wurde als Obergrenze $\mu + \sigma$ festgelegt. Wie man leicht nachrechnen kann ist $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 1,54$.

Der Annahmebereich liegt links und der Ablehnungsbereich rechts. Beim α -Fehler verwerfen wir die Nullhypothese und entscheiden uns für die Alternativhypothese H_1 . Ein Ergebnis aus $\bar{A}$ ist folglich eingetreten. Die rechte Seite ist also interessant. Daher liegt hier ein rechtsseitiger Test vor.

Wird der Annahmebereich vergrößert, dann verringert sich der α -Fehler, jedoch vergrößert sich der β -Fehler! Wird der Annahmebereich verkleinert, dann vergrößert sich der α -Fehler, jedoch verkleinert sich der β -Fehler! Beide Fehler werden nur gleichzeitig geringer, wenn man den Stichprobenumfang n vergrößert.

23.2 a)

I) Wir entscheiden uns gegen die Nullhypothese also für H_1 . Dazu müssen wir die Wahrscheinlichkeit für den Ablehnungsbereich bestimmen. Um die kumulierte Binomialverteilung verwenden zu können, müssen wir Wahrscheinlichkeiten $P(X \geq K)$ umformen in: $1 - P(X \leq K - 1)$

$$\alpha = P(\bar{A}) = P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49) = 1 - F(100; 0,4; 49) = 1 - 0,9729 = 2,71 \%$$

$$\alpha_2 = P(\bar{A}) = P(X \geq 49) = 1 - P(X \leq 48) = 1 - F(100; 0,4; 48) = 1 - 0,9577 = 4,23 \%$$

II)

$$\alpha = P(\bar{A}) = P(X \leq 74) = F(100; 0,8; 74) = 8,75 \%$$

23.2 b)

I)

$n = 100$; $H_0: p \leq 0,1$ Da die Nullhypothese bei einer kleineren Wahrscheinlichkeit als 0,1 angenommen wird, liegt der Annahmebereich ebenfalls links: $A = \{0, 1, \dots, K - 1\}$ und folglich der Ablehnungsbereich rechts: $\bar{A} = \{K, K + 1, \dots, 100\}$. Es handelt sich daher um einen rechtsseitigen Test, da der α -Fehler hierfür entscheidend ist. Dieser α -Fehler soll laut Aufgabenstellung 5 % betragen. Da K ganzzahlig sein muss, ist die Formulierung $\alpha \leq 5 \%$ besser:

$$\alpha = P(\bar{A}) = P(X \geq K) = 1 - P(X \leq K - 1) \leq 0,05$$

Stellt man die letzte Beziehung um, so erhält man $P(X \leq K - 1) \geq 0,95$

Man beachte, dass sich Relationszeichen umkehren, wenn eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird! Dies gilt für die Division gleichermaßen.

Gesucht ist daher ein K mit der Eigenschaft: $F(100; 0,1; K - 1) \geq 0,95$ oder einfacher:

$$F(100; 0,1; k) \geq 0,95$$

Schaut man in die entsprechende Tabelle der kumulierten Binomialverteilung, sieht man, dass für ein kleines $k = 15$ das erste Mal die 0,95-Grenze überschritten wird. Gesucht ist jedoch K . Lösen wir die Gleichung $K - 1 = k$ nach K auf, so erhalten wir: $K = k + 1 = 15 + 1 = 16$. Der Ablehnungsbereich wäre also $\bar{A} = \{16, 17, \dots, 100\}$.

Machen wir dazu noch eine Probe, um die Unsicheren zu überzeugen:

$$\alpha = P(\bar{A}) = P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F(100; 0,1; 15) = 1 - 0,9601 = 3,99 \%$$

Würde wir als Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{15, 16, \dots, 100\}$ wählen, ergäbe sich ein α -Fehler von 7,26 % und das wären mehr als 5 %. Unsere Lösung stimmt also!