



Berechnen Sie die (reellen) Lösungen der folgenden Gleichungen durch eine geeignete Substitution.

1. $x^4 + x^2 = 20$

6. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

2. $-x^4 + 25x^2 - 144 = 0$

7. $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$

3. $x^4 - 9x^2 = 0$

8. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

4. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

9. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

5. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

Beispiel:

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \quad | x^2 := u \quad (\text{Substitution})$$

$$u^2 - 8u + 16 = 0$$

$$u_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16} = 4$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^2 = 4$$

$$x_1 = -2$$

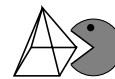
$$x_3 = 2$$

$$u_2 = x^2 = 4$$

$$x_2 = -2$$

$$x_4 = 2$$

Ergänzung: Wir erhalten zwei doppelte Nullstellen! An diesen Stellen berührt der Funktionsgraph die x -Achse. Die x -Achse wird also nicht geschnitten. Daher müssen an den Stellen $x_{1,2} = -2$ und $x_{3,4} = 2$ Extrema vorliegen.

**Lösungen:**

1.

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 &= 20 \\x^4 + x^2 - 20 &= 0 \quad | x^2 := u \quad (\text{Substitution}) \\u^2 + u - 20 &= 0 \\u_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20} \\u_1 &= -5 \\u_2 &= 4\end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{aligned}u_1 = x^2 &= -5 \quad \text{ist nicht lösbar (hat keine reelle Lösung)} \\u_2 = x^2 &= 4 \\ \Rightarrow x_1 &= -2 \\ x_2 &= 2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}-x^4 + 25x^2 - 144 &= 0 \\x^4 - 25x^2 + 144 &= 0 \quad | x^2 := u \\u^2 - 25u + 144 &= 0 \\u_{1,2} &= \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - 144} \\u_1 &= 9 \\u_2 &= 16\end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{array}{ll}u_1 = x^2 = 9 & u_2 = x^2 = 16 \\x_1 = -3 & x_3 = -4 \\x_2 = 3 & x_4 = 4\end{array}$$



3.

$$x^4 - 9x^2 = 0 \quad | x^2 := u$$

$$u^2 - 9u = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 9$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 0$$

$$u_2 = x^2 = 9$$

$$x_3 = -3$$

$$x_4 = 3$$

Ergänzung: doppelte Nullstelle bei $x = 0$. Also muss hier eine Extremstelle vorliegen.

Nachtrag: Natürlich ist es viel leichter und auch schneller, die Gleichung durch Ausklammern zu lösen, aber das sollte hier nicht geübt werden.

$$x^4 - 9x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 9) = x^2 \cdot (x - 3)(x + 3) = 0$$

4.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad | x^2 := u$$

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 4$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^2 = 1$$

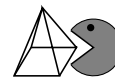
$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 1$$

$$u_2 = x^2 = 4$$

$$x_3 = -2$$

$$x_4 = 2$$



5.

$$\begin{aligned}
 x^4 - 34x^2 + 225 &= 0 & | x^2 := u \\
 u^2 - 34u + 225 &= 0 \\
 u_{1,2} &= 17 \pm \sqrt{289 - 225} \\
 u_1 &= 9 \\
 u_2 &= 25
 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{array}{ll}
 u_1 = x^2 = 9 & u_2 = x^2 = 25 \\
 x_1 = -3 & x_3 = -5 \\
 x_2 = 3 & x_4 = 5
 \end{array}$$

6.

$$\begin{aligned}
 x^4 + 3x^2 - 4 &= 0 & | x^2 := u \\
 u^2 + 3u - 4 &= 0 \\
 u_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} \\
 u_1 &= -4 \\
 u_2 &= 1
 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{array}{ll}
 u_1 = x^2 = -4 & u_2 = x^2 = 1 \\
 & x_1 = -1 \\
 & x_2 = 1
 \end{array}$$

7.

$$\begin{aligned}
 x^4 - 12x^2 - 64 &= 0 & | x^2 := u \\
 u^2 - 12u - 64 &= 0 \\
 u_{1,2} &= 6 \pm \sqrt{36 + 64} \\
 u_1 &= -4 \\
 u_2 &= 16
 \end{aligned}$$



Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^2 = -4$$

$$u_2 = x^2 = 16$$

$$x_1 = -4$$

$$x_2 = 4$$

8.

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \quad | x^3 := u$$

$$u^2 - 7u - 8 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8}$$

$$u_1 = -1$$

$$u_2 = 8$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^3 = -1$$

$$x_1 = -1$$

$$u_2 = x^3 = 8$$

$$x_2 = 2$$

9.

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \quad | x^3 := u$$

$$u^2 + 7u - 8 = 0$$

$$u_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8}$$

$$u_1 = -8$$

$$u_2 = 1$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^3 = -8$$

$$x_1 = -2$$

$$u_2 = x^3 = 1$$

$$x_2 = 1$$