Berechnen Sie die (reellen) Lösungen der folgenden Gleichungen durch eine geeignete Substitution.

1. $x^4 + x^2 = 20$
2. $-x^4 + 25x^2 - 144 = 0$
3. $x^4 - 9x^2 = 0$
4. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
5. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$
6. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
7. $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$
8. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
9. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

Beispiel:

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \qquad \big|x^2 := u \qquad \text{(Substitution)}$$
$$u^2 - 8u + 16 = 0$$
$$u_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16} = 4$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^2 = 4 \qquad x_1 = -2 \qquad x_3 = 2$$

$$u_2 = x^2 = 4 \qquad x_2 = -2 \qquad x_4 = 2$$

Ergänzung: Wir erhalten zwei doppelte Nullstellen! An diesen Stellen berührt der Funktionsgraph die x-Achse. Die x-Achse wird also nicht geschnitten. Daher müssen an den Stellen $x_{1,2} = -2$ und $x_{3,4} = 2$ Extrema vorliegen.

Lösungen:

1.

$$\begin{aligned}
x^4 + x^2 &= 20 \\
x^4 + x^2 - 20 &= 0 \qquad \left| x^2 := u \right. \quad \text{(Substitution)} \\
u^2 + u - 20 &= 0 \\
u_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20} \\
u_1 &= -5 \\
u_2 &= 4
\end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{aligned}
&u_1 = x^2 = -5 \quad \text{ist nicht lösbar (hat keine reelle Lösung)} \\
&u_2 = x^2 = 4 \\
&\Rightarrow \quad x_1 = -2 \\
&\qquad\quad x_2 = 2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
-x^4 + 25x^2 - 144 &= 0 \\
x^4 - 25x^2 + 144 &= 0 \qquad \left| x^2 := u \right. \\
u^2 - 25u + 144 &= 0 \\
u_{1,2} &= \frac{25}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4} - 144} \\
u_1 &= 9 \\
u_2 &= 16
\end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{aligned}
u_1 = x^2 &= 9 & u_2 = x^2 &= 16 \\
x_1 &= -3 & x_3 &= -4 \\
x_2 &= 3 & x_4 &= 4
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x^4 - 9x^2 &= 0 \qquad \left| x^2 := u \right. \\ u^2 - 9u &= 0 \\ u_{1,2} &= \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} \\ u_1 &= 0 \\ u_2 &= 9 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{aligned} u_1 = x^2 &= 0 \\ x_{1,2} &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} u_2 = x^2 &= 9 \\ x_3 &= -3 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Ergänzung: doppelte Nullstelle bei $x = 0$. Also muss hier eine Extremstelle vorliegen.

Nachtrag: Natürlich ist es viel leichter und auch schneller, die Gleichung durch Ausklammern zu lösen, aber das sollte hier nicht geübt werden.
$x^4 - 9x^2 = x^2 \cdot \left(x^2 - 9\right) = x^2 \cdot (x-3)\,(x+3) = 0$

4.

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \qquad \left| x^2 := u \right. \\ u^2 - 5u + 4 &= 0 \\ u_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\ u_1 &= 1 \\ u_2 &= 4 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{aligned} u_1 = x^2 &= 1 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} u_2 = x^2 &= 4 \\ x_3 &= -2 \\ x_4 &= 2 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x^4 - 34x^2 + 225 &= 0 \qquad \Big| x^2 := u \\ u^2 - 34u + 225 &= 0 \\ u_{1,2} &= 17 \pm \sqrt{289 - 225} \\ u_1 &= 9 \\ u_2 &= 25 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$\begin{aligned} u_1 = x^2 &= 9 \\ x_1 &= -3 \\ x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} u_2 = x^2 &= 25 \\ x_3 &= -5 \\ x_4 &= 5 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 - 4 &= 0 \qquad \Big| x^2 := u \\ u^2 + 3u - 4 &= 0 \\ u_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} \\ u_1 &= -4 \\ u_2 &= 1 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^2 = -4 \qquad\qquad \begin{aligned} u_2 = x^2 &= 1 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} x^4 - 12x^2 - 64 &= 0 \qquad \Big| x^2 := u \\ u^2 - 12u - 64 &= 0 \\ u_{1,2} &= 6 \pm \sqrt{36 + 64} \\ u_1 &= -4 \\ u_2 &= 16 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^2 = -4 \qquad\qquad u_2 = x^2 = 16$$
$$x_1 = -4$$
$$x_2 = 4$$

8.

$$\begin{aligned} x^6 - 7x^3 - 8 &= 0 \qquad \Big| x^3 := u \\ u^2 - 7u - 8 &= 0 \\ u_{1,2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8} \\ u_1 &= -1 \\ u_2 &= 8 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^3 = -1 \qquad\qquad u_2 = x^3 = 8$$
$$x_1 = -1 \qquad\qquad x_2 = 2$$

9.

$$\begin{aligned} x^6 + 7x^3 - 8 &= 0 \qquad \Big| x^3 := u \\ u^2 + 7u - 8 &= 0 \\ u_{1,2} &= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 8} \\ u_1 &= -8 \\ u_2 &= 1 \end{aligned}$$

Substitution wieder rückgängig machen:

$$u_1 = x^3 = -8 \qquad\qquad u_2 = x^3 = 1$$
$$x_1 = -2 \qquad\qquad x_2 = 1$$