1 Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion f. Ihr Schaubild sei die Kurve K. Untersuche K auf Symmetrie, Asymptoten bzw. Näherungskurve, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne K für $f\left(x\right) = \frac{x^3}{4(x-2)^2}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

2 Lösung

2.1 Symmetrie

Achsensymmetrie zur y-Achse: $f\left(x\right) = f\left(-x\right)$
Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung: $f\left(x\right) = -f\left(-x\right)$

$$f\left(-x\right) = \frac{(-x)^3}{4(-x-2)^2} = -\frac{x^3}{4(x+2)^2} \neq \begin{cases} f\left(x\right) \\ -f\left(x\right) \end{cases}$$

Es ist keine Symmetrie erkennbar.

2.2 Asymptoten/Näherungskurve

Ist a eine Polstelle von f, dann ist die Gerade mit der Gleichung $x = a$ eine *vertikale Asymptote*.
Eine ganzrationale Funktion g nennt man *Näherungsfunktion* zu f, wenn $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f\left(x\right) - g\left(x\right)\big) = 0$. Das Schaubild von g bezeichnet man dann als *Näherungskurve*. Ist g eine lineare Funktion, dann ist die Näherungskurve eine *horizontale* oder *schiefe Asymptote*.

Die Stelle 2 ist Polstelle ohne Vorzeichenwechsel (VZW), da $f\left(x\right) \to +\infty$ für $x \to 2$. Damit ist die Gerade $\boxed{g_1 : x = 2 \text{ vertikale Asymptote}}$ von K.

Vorbereitung der Polynomdivision: $4\left(x-2\right)^2 = 4x^2 - 16x + 16$

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 0x^2 + 0x + 0) : (4x^2 - 16x + 16) = \frac{1}{4}x + 1 + \frac{12x-16}{4(x-2)^2} = \frac{1}{4}x + 1 + \frac{3x-4}{(x-2)^2} \\
-(x^3 - 4x^2 + 4x) \\
\hline
 4x^2 - 4x \\
 -(4x^2 - 16x + 16) \\
\hline
 12x - 16
\end{array}$$

Damit ist die Gerade $\boxed{g_2 : y = \frac{1}{4}x + 1 \text{ schiefe Asymptote}}$ von K, da $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-4}{(x-2)^2} = 0$.

2.3 Ableitungen

$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot 4(x-2)^2 - x^3 \cdot 8(x-2)}{16(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2)-2x^3}{4(x-2)^3} = \frac{x^3-6x^2}{4(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}$

$f''(x) = \frac{\left(3x^2-12x\right)\cdot 4(x-2)^3 - \left(x^3-6x^2\right)\cdot 12(x-2)^2}{16(x-2)^6} = \frac{\left(3x^2-12x\right)(x-2) - 3\left(x^3-6x^2\right)}{4(x-2)^4} = \frac{6x}{(x-2)^4}$

$f'''(x) = \frac{6(x-2)^4 - 6x \cdot 4(x-2)^3}{(x-2)^8} = \frac{6(x-2)-24x}{(x-2)^5} = \frac{-6(3x+2)}{(x-2)^5}$

2.4 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ K schneidet die Koordinatenachsen in $\boxed{N(0|0)}$.

2.5 Extrempunkte

> NOTWENDIGE BEDINGUNG:
> Die Funktion f sei in einer Umgebung U_{x_e} differenzierbar. Dann gilt: x_e ist Extremstelle von $f \Rightarrow f'(x_e) = 0$
> HINREICHENDE BEDINGUNG:
> Die Funktion f sei in einer Umgebung U_{x_e} zweimal differenzierbar. Dann gilt
> $f''(x_e) < 0 \Rightarrow H\big(x_e|f(x_e)\big)$ ist Hochpunkt von f
> $f''(x_e) > 0 \Rightarrow T\big(x_e|f(x_e)\big)$ ist Tiefpunkt von f

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$

1. Fall ($x = 0$): $f''(0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich!

2. Fall ($x = 6$): $\left.\begin{array}{rcl} f''(6) & = & \frac{9}{64} > 0 \\ f(6) & = & \frac{27}{8} = 3,375 \end{array}\right\} \Rightarrow$ K besitzt den $\boxed{\text{Tiefpunkt } T\left(6|\frac{27}{8}\right)}$

2.6 Wendepunkte

> NOTWENDIGE BEDINGUNG:
> Die Funktion f sei in einer Umgebung U_{x_w} zweimal differenzierbar. Dann gilt: x_w ist Wendestelle von $f \Rightarrow f''(x_w) = 0$
> HINREICHENDE BEDINGUNG:
> Die Funktion f sei in einer Umgebung U_{x_w} dreimal differenzierbar. Dann gilt
> $f'''(x_w) \neq 0 \Rightarrow W\big(x_w|f(x_w)\big)$ ist Wendepunkt von f.
> SATTELPUNKT (Wendepunkt mit horizontaler Tangente):
> $f'(x_w) = 0 \wedge f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'''(0) = \frac{3}{8} = 0,375 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Sattelpunkt } W(0|0)}$

2.7 Schaubild