Betrachten wir einmal die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ aus dem Einführungsbeispiel und verwenden als Startwert[1] $x_0 = -1$. Dann ist der nächste Schritt, dass man hierzu den Funktionswert berechnet $f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 1$ und dort die Funktionsgleichung der Tangente aufstellt:

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + b \\ f(x_0) &= f'(x_0) \cdot x_0 + b \\ 1 &= 1 \cdot (-1) + b \\ \Rightarrow b &= 2 \end{aligned}$$

Jetzt kennen wir alle Bestandteile der Funktionsgleichung der Tangente: die Steigung $m = f'(x_0) = 1$ und den y-Achsenabschnitt $b = 2$ und damit auch ihre Funktionsgleichung: $y = 1x + 2$. Um den nächsten Startwert x_1 zu berechnen, muss man den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen. Wir suchen also die Nullstelle:

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_0) \cdot x_1 + b \\ 0 &= 1x_1 + 2 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

Das wäre dann der neue Startwert. Betrachten wir nun den allgemeinen Fall für eine Funktion $f(x)$ mit dem Startwert x_0:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

nach b umstellen:

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse berechnen:

$$0 = f'(x_0) \cdot x_1 + b$$

b ersetzen:

$$0 = f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

nach x_1 umstellen:

$$\begin{aligned} -f'(x_0) \cdot x_1 &= f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\ x_1 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{f'(x_0)}{f'(x_0)} \cdot x_0 \\ x_1 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0 \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Damit haben wir allgemein einen Weg gefunden, den nächsten Startwert auszurechnen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \geq 0)$$

[1] Den Startwert gibt meistens die Aufgabenstellung vor.

Jetzt können wir auch die Formel als Abkürzung verwenden, um bei dem obigen Beispiel den jeweils nächsten Startwert auszurechnen:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -1 \\
x_1 &= -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{1}{1} = -2 \\
x_2 &= -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} = -2 - \frac{-3}{8} = -\frac{13}{8} = -1{,}625 \\
x_3 &= -\frac{13}{8} - \frac{f\left(-\frac{13}{8}\right)}{f'\left(-\frac{13}{8}\right)} = -\frac{13}{8} - \frac{-\frac{333}{512}}{\frac{299}{64}} = -\frac{1777}{1196} \approx -1{,}48578595 \\
x_4 &= \cdots \\
&\vdots \\
x_\infty &= -1{,}46557123\ldots
\end{aligned}
$$