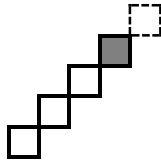


Stufe:**4****Thema:**

Eine Gerade schneidet eine Ebene:
Wo liegt der Durchstoßpunkt?

**Aufgabe 4:**

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E . In welchem Punkt D (Durchstoßpunkt) schneiden sich Gerade und Ebene?

Berechne mindestens zwei Durchstoßpunkte. Wenn Du Dich sicher genug fühlst, dann gehe zu Stufe 5. Hier kommen ausgelassene Sonderfälle vor

Beispiel:

Gegeben sind Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Gesucht wird: Parameter t oder die Parameter r und s . Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Umwandlung in ein Gleichungssystem führt zu:

$$\begin{cases} 4 - 2t = 5 + 2r - 1s \\ -1 + 1t = 5 + 3r + 2s \\ 2 + 1t = 3 + 1r + 3s \end{cases}$$

Nach Möglichkeit sollte man die Gleichungen so umformen, dass zuerst r und s durch Addition/Subtraktion wegfallen. Dazu wird die erste Gleichung mit 3, die zweite Gleichung mit 2 und die dritte Gleichung mit 6 multipliziert:

$$\begin{cases} 12 - 6t = 15 + 6r - 3s \\ -2 + 2t = 10 + 6r + 4s \\ 12 + 6t = 18 + 6r + 18s \end{cases}$$

Jetzt subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten und die dritte Gleichung von der ersten. Man erhält zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die wir auf bekanntem Weg lösen:

$$\begin{cases} 14 - 8t = 5 - 7s \\ 0 - 12t = -3 - 21s \end{cases}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 3:

$$\begin{cases} 42 - 24t = 15 - 21s \\ 0 - 12t = -3 - 21s \end{cases}$$

Subtrahiert man nun die zweite Gleichung von der ersten, erhält man:

$$42 - 12t = 18$$

Auflösen nach β führt zu:

$$-12t = -24$$

$$t = 2$$

Setzt man diesen Wert in die Geradengleichung ein, ergibt sich der Ortsvektor des Durchstoßpunkts:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D(0|1|4)$$

Die Gerade g durchstößt die Ebene E im Punkt $D(0|1|4)$.

Anmerkung zum Beispiel:

Wenn man zuerst r und s berechnet führt das auch zum Ziel. Allerdings müssen in diesem Fall zwei Parameter berechnet werden ($r = -2$ und $s = 1$). Diese setzt man in die Ebenengleichung ein und erhält den gleichen Durchstoßpunkt. Falls keine Lösung vorliegt, kann man sich auf diesem Weg selbst kontrollieren.

Aufgabe 4:

Bestimme den Durchstoßpunkt D der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch die Ebene E .

(a) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

(d) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -10 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$

Lösungen zu Stufe 4

Aufgabe 4

- (a) $D(-2 | 2 | 5)$ ($t = 3$; $r = -1$ und $s = 0$)
- (b) $D(1 | 0,5 | 3,5)$ ($t = 1,5$; $r = 0$ und $s = 0,5$)
- (c) $D(8 | -3 | 0)$ ($t = -2$; $r = 0$ und $s = -1$)
- (d) $D(3 | -0,5 | 2,5)$ ($t = 0,5$; $r = 0,5$ und $s = 0$)