



An einer Mathematikolympiade nehmen 100 Schülerinnen und Schüler (SuS) teil. 60 Teilnehmende haben sich in einer Arbeitsgemeinschaft (AG) besonders intensiv vorbereitet. Das Ergebnis der Olympiade ist in folgender Vierfeldertafel¹ dargestellt:

	Punktzahl < 10	Punktzahl ≥ 10	Summe
SuS ohne AG (\overline{AG})	30		
SuS mit AG		55	
Summe			100

Der Vierfeldertafel können wir beispielsweise entnehmen, dass 30 Schülerinnen und Schüler nicht an der AG teilgenommen haben *und* weniger als 10 Punkte bekommen haben.

Aufgabe 1

> Ergänze unter Verwendung der Angaben im Einleitungstext die fehlenden Werte!

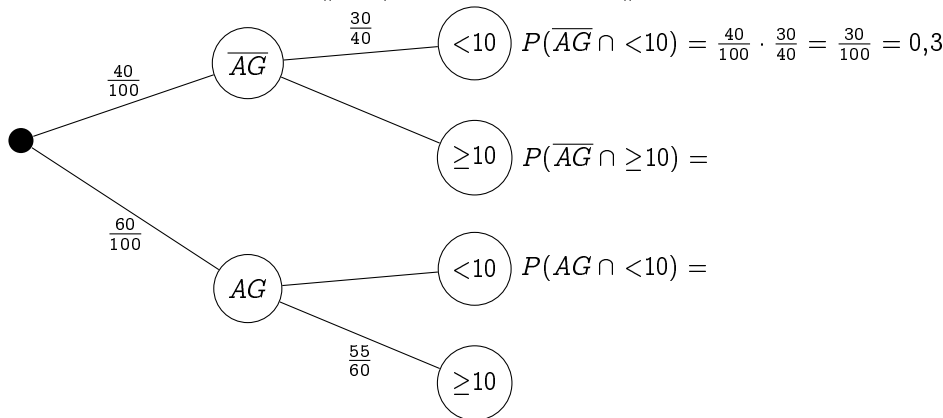
Aufgabe 2

In der oberen Vierfeldertafel stehen **absolute Häufigkeiten**. Ergänze in der nachfolgenden Vierfeldertafel die fehlenden **relativen Häufigkeiten**.

	Punktzahl < 10	Punktzahl ≥ 10	Summe
SuS ohne AG (\overline{AG})	$\frac{30}{100} = 0,3$		
SuS mit AG		$\frac{55}{100} = 0,55$	
Summe			1

Die relativen Häufigkeiten können wir hier auch als **Wahrscheinlichkeiten** interpretieren: Die Wahrscheinlichkeit, dass von den 100 Personen eine zufällig ausgewählte Person nicht an der AG teilgenommen hat *und* weniger als 10 Punkte bekommen hat, beträgt 30% (0,3).

Für das Zeichnen eines Wahrscheinlichkeitsbaumes gibt es zwei Möglichkeiten. Im ersten Baumdiagramm betrachten wir zunächst das Merkmal „AG“, dann das Merkmal „Punktzahl“:



Aufgabe 3

Ergänze in dem Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten. Zeichne anschließend ein zweites Baumdiagramm (mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten) hier daneben, in dem zuerst das Merkmal „Punktzahl“ und dann das Merkmal „AG“ betrachtet wird.

¹ Die Spalten- und Zeilensummen gehören eigentlich nicht dazu sind aber sehr hilfreich.

Aufgabe 4

Vergleiche die Wahrscheinlichkeiten der beiden Bäume auf der vorherigen Seite mit den relativen Häufigkeiten der zweiten Vierfeldertafel (ebenfalls erste Seite). Wo finden sich welche Werte wieder?

Gegeben seien die folgenden zwei Ereignisse: A : „Der Schüler² ist AG-Teilnehmer.“ und B : „Der Schüler hat mindestens 10 Punkte erreicht.“ Aus der zweiten Vierfeldertafel bzw. den Baumdiagrammen können wir $P(A) = \frac{60}{100} = 0,6$ und $P(B) = \frac{65}{100} = 0,65$ ablesen.

Betrachten wir einmal *nur* die AG-Teilnehmer: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter AG-Teilnehmer mindestens 10 Punkte hat? Hier wird eine **bedingte Wahrscheinlichkeit** gesucht! Die Bedingung ist, dass der Schüler AG-Teilnehmer ist. Folgende Schreibweisen sind dabei üblich: $P_A(B) = P(B/A) = \frac{55}{60} \approx 0,92$. Gelesen: „Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist, beträgt $\frac{55}{60}$.“

Aufgabe 5

> Bestimme folgende bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P_{\bar{A}}(B) =$$

$$P_B(A) =$$

$$P_{\bar{B}}(A) =$$

Die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P_{\bar{A}}(B)$ **unterscheiden sich** sehr stark **voneinander**. Daher muss zwischen den Ereignissen A und B ein sehr **enger Zusammenhang** bestehen. Man sagt dazu, dass die Ereignisse A und B **stochastisch abhängig** sind.

Würde kein Zusammenhang bestehen, dann gäbe es anteilig etwa genauso viele AG-Teilnehmer wie Nicht-Teilnehmer mit mindestens 10 Punkten. Die relativen Häufigkeiten würden **ungefähr übereinstimmen**. Bei **stochastischer Unabhängigkeit** der Ereignisse A und B gilt: $P_A(B) \approx P_{\bar{A}}(B) \approx P(B)$. Das Eintreten des Ereignisses A bzw. \bar{A} **beeinflusst also nicht** das Eintreten des Ereignisses B !

Hinweis

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit bei zwei Ereignissen A und B mit $P(A) \neq 0$ und $P(B) \neq 0$ gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(B \cap A)$$

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)}$$

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(A)}$$

Aufgabe 6

Aus einer Pressemitteilung: „Jungen beenden in NRW ihre Schulzeit häufiger ohne Hauptschulabschluss als Mädchen. Von den 105524 Schülerinnen gingen 5441 ohne Schulabschluss ab. Bei den 108313 männlichen Schulabgängern waren es dagegen 9300.“

- Trage die absoluten Häufigkeiten in eine Vierfeldertafel ein.
- Zeichne eine zweite Vierfeldertafel und trage dort die relativen Häufigkeiten (gerundet auf 3 Nachkommastellen) ein.
- Zeichne die beiden zugehörigen Baumdiagramme mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
- Bestimme die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse W = „Das Geschlecht ist weiblich.“ und H = „Der Schulabgänger hat einen Hauptschulabschluss.“: $P_W(H)$, $P_{\bar{W}}(H)$, $P_H(W)$ und $P_{\bar{H}}(W)$.
- Sind die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig oder abhängig?

² Aus Vereinfachungsgründen wird im Folgenden nur die männliche Form verwendet.

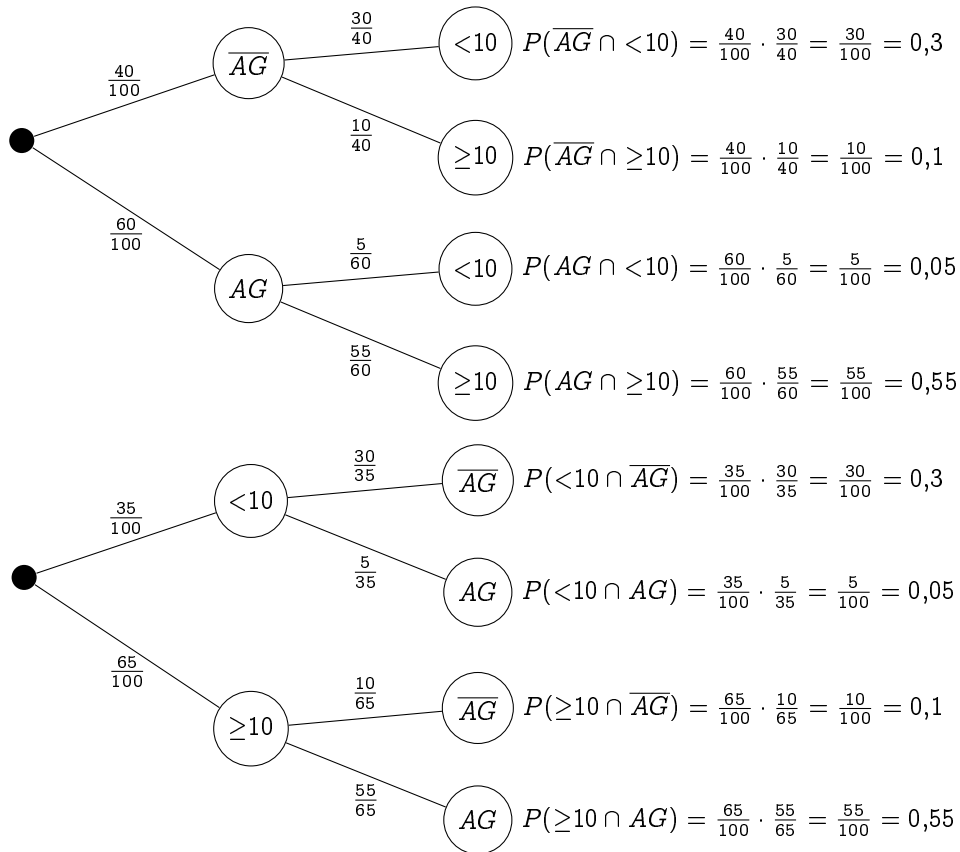


Lösung

Einführungsbeispiel:

	Punktzahl < 10	Punktzahl ≥ 10	Summe
SuS ohne AG (\overline{AG})	30	10	40
SuS mit AG	5	55	60
Summe	35	65	100

	Punktzahl < 10	Punktzahl ≥ 10	Summe
SuS ohne AG (\overline{AG})	0,3	0,1	0,4
SuS mit AG	0,05	0,55	0,6
Summe	0,35	0,65	1



Die Wahrscheinlichkeiten zur ersten Stufe im Baumdiagramm findet man in der Spaltensumme bzw. -zeile wieder. Die Wahrscheinlichkeiten am Ende der Pfade (also an den Blättern des Baumes) befinden sich innerhalb der Vierfeldertafel. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten sucht man in der Vierfeldertafel vergeblich! Hier hilft nur eine kleine Rechnung (siehe Hinweis auf der zweiten Seite).

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{10}{40} = 0,25 \quad P_B(A) = \frac{55}{65} \approx 0,85 \quad P_{\overline{B}}(A) = \frac{5}{35} \approx 0,14$$

Vergleicht man beispielsweise $P_A(B) \approx 0,92$ mit $P(B) \approx 0,65$ stellt man fest, dass sich diese voneinander unterscheiden. Selbstverständlich kann man auch andere Vergleiche heranziehen und kommt zu der gleichen Aussage: $P_{\overline{A}}(B) \approx 0,25$ und $P_A(B) \approx 0,92$ unterscheiden sich ebenfalls. Folglich gibt es einen **Zusammenhang zwischen dem Geschlecht und dem Schulabschluss**. Die Ereignisse A und B sind **stochastisch abhängig voneinander**.

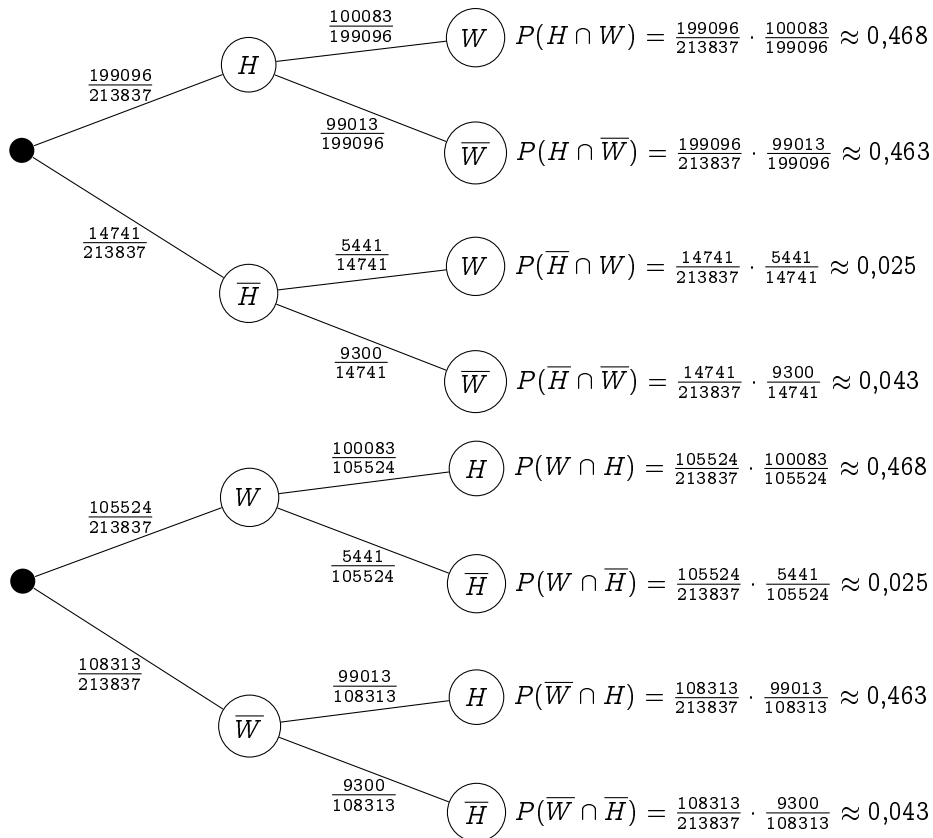


Aufgabe 6:

Lösung

	W	\bar{W}	Summe
H	100 083	99 013	199 096
\bar{H}	5 441	9 300	14 741
Summe	105 524	108 313	213 837

	W	\bar{W}	Summe
H	0,468	0,463	0,931
\bar{H}	0,025	0,043	0,069
Summe	0,493	0,507	1



$$P_W(H) = \frac{100083}{105524} \approx 0,948, P_{\bar{W}}(H) = \frac{99013}{108313} \approx 0,914, P_H(W) = \frac{100083}{199096} \approx 0,503 \text{ und } P_{\bar{H}}(W) = \frac{5441}{14741} \approx 0,369$$

Vergleicht man beispielsweise $P_W(H) \approx 0,948$ mit $P(H) = \frac{199096}{213837} \approx 0,931$ stellt man fest, dass sich diese kaum voneinander unterscheiden. Selbstverständlich kann man auch andere Vergleiche heranziehen und kommt zu der gleichen Aussage: $P_{\bar{W}}(H) \approx 0,914$ und $P_W(H) \approx 0,948$ unterscheiden sich ebenfalls nur in geringem Maße. Folglich gibt es (fast) **keinen Zusammenhang** zwischen dem Geschlecht und dem Schulabschluss. Die Ereignisse H und W sind (eher als) **stochastisch unabhängig** voneinander (anzusehen).